Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes November 2024

15 November – 18 November 2024

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \dots\}$.
2. Notasi $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.
7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \cdots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
9. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
10. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\{x\}$ menyatakan bagian pecahan dari x. Dengan kata lain, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Sebagai contoh, $\{2.3\} = 0.3$, $\{9.99\} = 0.99$, $\{-2.89\} = 0.11$, dan $\{4\} = 4$.
11. Notasi $\min\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ menyatakan bilangan real terkecil dari kumpulan bilangan real $a_1, a_2, \dots, a_k$. Sebagai contoh, $\min\{4, 1.5, 5\} = 1.5$, $\min\{3.5, \pi, 3, 4\} = 3$, $\min\{-5, 3\} = -5$, dan $\min\{1\} = 1$.
12. Notasi $\max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ menyatakan bilangan real terbesar dari kumpulan bilangan real $a_1, a_2, \dots, a_k$. Sebagai contoh, $\max\{4, 1.5, 5\} = 5$, $\max\{3.5, \pi, 3, 4\} = 4$, $\max\{-5, 3\} = 3$, dan $\max\{1\} = 1$.
13. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b.
14. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
15. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
16. Fungsi $\tau(n)$ menyatakan banyaknya faktor positif dari sebuah bilangan asli n.
17. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n.
18. Notasi $\binom{n}{k}$ menyatakan nilai $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

19. Pada $\triangle ABC$:

    (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi segmen (ruas garis) $\overline{BC}$ menjadi dua bagian yang sama panjang.

    (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.

    (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC.

    (d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A, garis berat dari titik B, dan garis berat dari titik C.

    (e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A, garis tinggi dari titik B, dan garis tinggi dari titik C.

    (f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A, B, dan C.

    (g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, dan $\overline{AB}$.

20. Luas dari sebuah segi-n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.

21. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i-1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i. Contohnya, $3, 5, 7, 9, \ldots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.

22. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan taknol (bisa jadi 1) untuk setiap i. Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ merupakan barisan geometrik.

23. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{a+b}{2}$.

24. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{ab}$.

25. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Seekor semut berada pada titik (0,0) pada koordinat kartesius. Setiap langkah, semut bisa berjalan dari titik asal (a, b) ke titik-titik $(a-1, b)$, $(a+1, b)$, $(a, b-1)$, $(a, b+1)$. Misal semut tersebut berjalan 2 langkah dan berakhir pada titik (p, q). Tentukan banyaknya jalan semut sehingga $|p| + |q| \neq 2$.

2. Diketahui bilangan real a dan b merupakan akar berbeda dari persamaan $x^2 - 5x + 2 = 0$. Tentukan nilai dari $a^3 + (5b-7)(b+1)$.

3. Didefinisikan suatu fungsi $f(x)$ sehingga

$$f(x) = x^3 - 8x^2 + 14x + 8$$

Tentukan jumlah dari semua bilangan bulat a sehingga $f(a)$ adalah bilangan prima.

4. Diberikan trapesium sama kaki $ABCD$ dengan sisi AB sejajar terhadap CD, diketahui panjang $AB = 20$, $CD = 30$, dan $BC = 13$. Terdapat dua lingkaran, dimana lingkaran pertama menyinggung segmen AB, CD, dan DA. Sedangkan, lingkaran kedua menyinggung segmen AB, BC, dan CD. Apabila lingkaran pertama dan kedua berpusat di P dan Q berturut-turut, tentukan luas dari trapesium $PQCD$.

5. Diberikan barisan $a_k = \dfrac{6k^2+12k+4}{k^2(k+1)^2(k+2)^2}$ untuk bilangan asli k. Jika $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \dfrac{166}{225}$, tentukan nilai n.

6. Tentukan banyaknya himpunan non-kosong $S \subseteq \{-10, -9, \ldots, 9, 10\}$ sehingga

$$|S| = -\min(S) \cdot \max(S)$$

di mana $\min(S)$ di definisikan sebagai elemen paling kecil dari S dan $\max(S)$ di definisikan sebagai elemen paling besar dari S.

7. Tentukan banyaknya pasangan terurut bilangan asli (a, b) dengan $\text{FPB}(a, b) = 1$ sehingga $a^2 + b^2 + a + b$ merupakan kelipatan ab.

8. Diberikan segitiga sama kaki ABC dengan $AC = BC$ dan $\angle ACB = 44°$. Titik M berada di luar segitiga ABC dan di sisi yang berbeda dengan titik B terhadap garis AC sehingga $\angle MCA = 8°$, $\angle AMB = 22°$, serta $\angle CAM$ lancip. Tentukan besar $\angle CMB$.

9. Terdapat 19 orang yang diberi nomor 1 sampai 19. Dari 19 orang tersebut, akan dipilih satu orang secara acak. Untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ dan $k < 20$, jika orang bernomor k yang terpilih, orang tersebut akan kemudian memilih 2 angka dari himpunan $\{k, k+1, k+2, ..., 20\}$. Misal peluang angka 20 terpilih adalah $\frac{a}{b}$, di mana a dan b adalah bilangan asli yang relatif prima. Tentukan nilai dari $a + b$.

10. Diketahui segitiga ABC dengan sudut $\angle BAC = 2\angle BCA$. Titik X dan Y berturut-turut pada segmen AC dan BC sehingga $BX = 6, YC = 5$, $CB = 9$, dan $\cos(\angle BXY) = \frac{3}{4}$. Jika nilai $AC \cdot AY$ adalah $\frac{a}{b}$ dengan $\text{fpb}(a, b) = 1$, tentukan nilai $a + b$.

11. Didefinisikan untuk setiap bilangan asli n berlaku,

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \left(n \pmod{k}\right).$$

Sebagai contoh: $S(4) = 0+0+1+0 = 1$ dan $S(7) = 0+1+1+3+2+1+0 = 8$. Tentukanlah hasil penjumlahan dari semua bilangan asli N, yang memenuhi $S(N) = N - 1$.

12. Tentukan banyaknya a bilangan riil sehingga persamaan

$$x^3 - 2x^2 - (a^2 - 4a + 7)x - (2a^2 - 7a) = 0$$

memiliki tepat 2 solusi unik yang riil.

13. Tentukan jumlah seluruh bilangan asli $n \leqslant 160$ sehingga

$$\frac{3n^3 - 1}{\varphi(n)}$$

merupakanbilanganasli.

14. Diberikan segitiga ABC dengan titik pusat lingkaran dalam I, titik pusat lingkaran luar O, dan titik tinggi H, jika $AB = 12$, $BC = 15$, dan I segaris dengan O dan H, serta $AC < BC$. Jika nilai dari $\frac{OH}{OI}$ adalah $\frac{a}{b}$ di mana a dan b adalah bilangan asli dan $\gcd(a, b) = 1$, maka tentukanlah nilai dari $a + b$.

15. Diberikan barisan bilangan real $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ sehingga $x_0 \in \mathbb{Z}$ dan

$$x_n = 3x_{n-1} - n^3$$

untuk setiap bilangan bulat $n \geq 1$. Nilai minimum x_0 sehingga $x_n > 0$ untuk setiap n adalah …

16. Tentukan sisa pembagian ekspresi berikut oleh 31:

$$\sum_{j=0}^{2024} \binom{4048}{2024 + j} 30^{j-1} j.$$

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Diketahui sebuah segitiga lancip $\triangle ABC$ dengan lingkaran luarnya ω dan garis l_1 dan l_2 yang merupakan garis yang menyinggung ω berturut turut di B dan C yang berpotongan di titik D. Misalkan titik E di perpanjangan AB dan titik F di perpanjangan AC sehingga $\angle FBA = \angle ECA = 90^\circ$

   (a) Tunjukkan bahwa $\triangle ABC$ dan $\triangle AFE$ sebangun.

   (b) Tunjukkan bahwa segiempat $BCFE$ siklis.

   (c) Misalkan M adalah titik tengah EF. Buktikan bahwa $ME = MB = MC = MF$.

   (d) Buktikan bahwa $\angle CBD = \angle CBM$.
   Dari bagian (c) dan (d), simpulkanlah bahwa $M = D$.

   (e) Misalkan titik X titik tengah BC, buktikan bahwa $\triangle AXB$ sebangun $\triangle ADF$ dan $\triangle AXC$ sebangun $\triangle ADE$. Juga buktikan bahwa $\angle BAD = \angle FAX$

   (f) Misalkan titik Y adalah perpotongan AD dan BC, buktikan bahwa $\dfrac{CY}{YB} = \dfrac{AC^2}{AB^2}$

2. Diberikan bilangan asli a, b, c sehingga memenuhi sistem persamaan

$$\begin{aligned} 10a &= 23\varphi(b) \\ 10b &= 23\varphi(c) \\ 10c &= 23\varphi(a) \end{aligned}$$

   Buktikan bahwa $a = b = c$.

   Catatan: $\varphi(n)$ menyatakan banyaknya bilangan asli kurang dari atau sama dengan n yang relatif prima dengan n.

3. Sebuah turnamen catur diikuti oleh lebih dari satu peserta laki-laki dan lebih dari satu peserta perempuan. Setiap pasang peserta bermain tepat satu permainan catur, dan tidak ada permainan yang berakhir seri. Setelah setiap permainan selesai, diketahui bahwa untuk setiap peserta, banyak peserta laki-laki yang ia kalahkan sama banyak dengan banyak peserta perempuan yang ia kalahkan.

   Tentukan jumlah peserta minimal yang mungkin dari turnamen tersebut.

4. Untuk 3 bilangan real positif a, b, c dan $-2 < k < 2$. Buktikan bahwa

$$27(a^2 + kab + b^2)(b^2 + kbc + c^2)(c^2 + kca + a^2) \geq (k+2)^3(ab + bc + ca)^3.$$