Kontes Terbuka Olimpiade Matematika

Kontes Maret 2024

8 Maret – 11 Maret 2024

www.februldefila.com

Berkas Soal

Definisi dan Notasi

Berikut ini adalah daftar definisi yang digunakan di dokumen soal ini.

1. Notasi $\mathbb{N}$ menyatakan himpunan semua bilangan asli, yaitu $\{1, 2, \ldots\}$.
2. Notasi $\mathbb{Z}$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat, yaitu $\{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
3. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
4. Notasi $\mathbb{Q}$ menyatakan himpunan semua bilangan rasional.
5. Bilangan real yang tidak rasional disebut sebagai bilangan irasional.
6. Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.
7. Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, $n!$ (dibaca n faktorial) bernilai $1 \times 2 \times \cdots \times n$. Contohnya, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Selain itu, $0!$ didefinisikan sebagai 1.
8. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.89 \rfloor = -3$, dan $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
9. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.89 \rceil = -2$, dan $\lceil 4 \rceil = 4$.
10. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\{x\}$ menyatakan bagian pecahan dari x. Dengan kata lain, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Sebagai contoh, $\{2.3\} = 0.3$, $\{9.99\} = 0.99$, $\{-2.89\} = 0.11$, dan $\{4\} = 4$.
11. Notasi $\min\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ menyatakan bilangan real terkecil dari kumpulan bilangan real $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Sebagai contoh, $\min\{4, 1.5, 5\} = 1.5$, $\min\{3.5, \pi, 3, 4\} = 3$, $\min\{-5, 3\} = -5$, dan $\min\{1\} = 1$.
12. Notasi $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ menyatakan bilangan real terbesar dari kumpulan bilangan real $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Sebagai contoh, $\max\{4, 1.5, 5\} = 5$, $\max\{3.5, \pi, 3, 4\} = 4$, $\max\{-5, 3\} = 3$, dan $\max\{1\} = 1$.
13. Notasi $a \mid b$ menyatakan a habis membagi b (atau b habis dibagi a). Notasi $a \nmid b$ menyatakan a tidak habis membagi b.
14. $a \equiv b \pmod{c}$ jika dan hanya jika c membagi $|a - b|$.
15. Dua bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* bila $\text{fpb}(a, b) = 1$.
16. Fungsi $\tau(n)$ menyatakan banyaknya faktor positif dari sebuah bilangan asli n.
17. Fungsi Euler-phi (atau fungsi Euler), biasa didefinisikan sebagai $\varphi(n)$, menyatakan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai n yang relatif prima dengan n.
18. Notasi $\binom{n}{k}$ menyatakan nilai $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

19. Pada $\triangle ABC$:

    (a) Garis berat dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan membagi segmen (ruas garis) $\overline{BC}$ menjadi dua bagian yang sama panjang.

    (b) Garis bagi $\angle A$ adalah garis yang melewati titik A dan membagi $\angle BAC$ menjadi dua bagian yang sama besar.

    (c) Garis tinggi dari titik A adalah garis yang melewati titik A dan tegak lurus dengan garis BC.

    (d) Titik berat $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis berat dari titik A, garis berat dari titik B, dan garis berat dari titik C.

    (e) Titik tinggi $\triangle ABC$ adalah perpotongan garis tinggi dari titik A, garis tinggi dari titik B, dan garis tinggi dari titik C.

    (f) Lingkaran luar $\triangle ABC$ adalah lingkaran yang melewati titik A, B, dan C.

    (g) Lingkaran dalam $\triangle ABC$ adalah lingkaran di dalam $\triangle ABC$ yang menyinggung segmen $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, dan $\overline{AB}$.

20. Luas dari sebuah segi-n dibungkus dengan kurung siku, yakni [dan]. Contohnya, $[ABC]$ dan $[DEFG]$ masing-masing menyatakan luas segitiga ABC dan luas segiempat $DEFG$.

21. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan aritmetika* bila $a_{i-1} - a_i$ bernilai konstan (bisa jadi 0) untuk setiap i. Contohnya, $3, 5, 7, 9, \ldots$ dan $2, 2, 2$ merupakan barisan aritmetika.

22. Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut *barisan geometrik* bila $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ bernilai konstan taknol (bisa jadi 1) untuk setiap i. Contohnya, $4, 6, 9$ dan $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ merupakan barisan geometrik.

23. Rata-rata aritmetik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{a+b}{2}$.

24. Rata-rata geometrik dari dua bilangan real a dan b adalah $\sqrt{ab}$.

25. Rata-rata harmonik dari dua bilangan real a dan b adalah $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Bagian A

Untuk setiap soal, tuliskan saja jawaban akhirnya. Setiap soal bernilai 1 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah atau dikosongkan. Jawaban soal-soal bagian A dipastikan merupakan bilangan bulat.

1. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan
$$\frac{x-44\cdot 45}{44+45}+\frac{x-45\cdot 46}{45+46}+\frac{x-46\cdot 44}{46+44}=44+45+46.$$

2. Terdapat empat buah kaleng dan lima buah bola identik. Untuk setiap bola, Beben memilih satu kaleng secara acak lalu memasukan bola ke kaleng tersebut. Misalkan $\frac{p}{q}$ adalah peluang tepat tiga kaleng memiliki minimal satu bola. Berapakah nilai dari $100p+q$?

3. Diberikan sebuah segitiga sama sisi ABC. Titik D terletak lebih dekat ke titik C daripada ke A sedemikian hingga BD sejajar dengan AC dan $BD=AB$. Konstruksikan sebuah persegi $BDEF$ dengan titik E ada di sisi yang berbeda dari C terhadap BD. Diketahui bahwa luas persegi $BDEF$ adalah $4-\sqrt{3}$. Jika panjang dari AE adalah n, tentukan nilai dari $\lfloor n^2 \rfloor$.

4. Tentukan jumlah semua bilangan asli n sehingga 3^n-4n merupakan bilangan kuadrat sempurna.

5. Diberikan tiga bilangan riil tak nol a,b,c yang memenuhi kedua persamaan
$$\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}=-3,$$
$$ab+bc+ca=-2024.$$
Tentukan nilai dari $a^3+b^3+c^3-3abc$.

6. Jika kita memiliki 5 garis lurus pada bidang, di mana tidak ada dua garis yang sejajar dan tidak ada tiga garis yang berpotongan di satu titik yang sama, berapa banyak wilayah maksimum yang dapat dibentuk oleh garis-garis tersebut?

7. Diberikan suatu persegi $ABCD$ dimana $AB=4$. Misalkan E dan F adalah dua titik berbeda di bidang sehingga segitiga EDC dan FDC sama sisi, dan E terdapat di dalam persegi tersebut. Misalkan pula G adalah titik di luar persegi $ABCD$ sehingga segitiga GBC sama sisi. Jika luas dari segitiga EGF adalah L, tentukanlah $\lfloor L \rfloor$.

8. Jika n bilangan asli, tentukan nilai terbesar yang mungkin dari
$$\text{fpb}\left(n^2+3n-1, n^2+n+5, n^2-2n+2\right).$$

9. Diberikan fungsi $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ yang memenuhi
$$f(x)f(y)-f(x)-f(y)+2=f(xy)$$
untuk setiap bilangan rasional x dan y. Untuk setiap bilangan prima p berlaku $f(p)=p$. Jika nilai dari $f(\frac{1}{2024})=\frac{a}{b}$ dengan $FPB(a,b)=1$, tentukan nilai dari $a+100b$.

10. Sebuah kamp pelatihan olimpiade diisi oleh sepuluh orang pembina yang akan menempati lima kamar: 3 kamar berisi dua orang, 1 kamar berisi satu orang, dan 1 kamar berisi tiga orang. Di setiap kamar, tepat satu orang ditugaskan memegang kunci kamar. Untuk pergi dari tempat pelatihan ke tempat penginapan, sepuluh orang ini akan menaiki 2 mobil yang masing-masing diisi lima orang, dengan selisih waktu berangkat yang cukup panjang. Apabila pemegang kunci setiap kamar harus datang bersamaan atau lebih dahulu dari setiap penghuni kamar lainnya, tentukan banyak cara membagi keberangkatan kesepuluh pembina.

11. Diberikan persegi $ABCD$ dengan panjang sisi 10, di mana titik E dan F berturut-turut terletak pada segmen AD dan segmen AB sehingga panjang $AF = 8$ dan $AE = 6$. Jika titik M dan N masing-masing berada di segmen EF sedemikian sehingga $\angle AMF = \angle CNM = 90°$, maka tentukan panjang MN.

12. Tentukan banyaknya nilai yang mungkin dari sisa pembagian $2^{n!}$ oleh n, di mana n dapat berkisar pada seluruh bilangan ganjil positif.

13. Misalkan segitiga ABC dengan $\angle BAC > 90°$ dan panjang $AC < AB$. Titik D merupakan pencerminan titik A terhadap garis BC. Garis BD memotong lingkaran luar segitiga ABC sekali lagi di titik E dan lingkaran luar segitiga CED memotong segmen BC sekali lagi di titik F. Jika diketahui $\angle ACB + \angle DFE = 82°$ dan I perpotongan ketiga garis bagi segitiga ABE, tentukan besar $\angle FAI$ dalam satuan derajat.

14. Pada sebuah grid $25 \times n$, setiap persegi satuan diwarnai oleh tepat satu dari 8 warna yang berbeda. Diketahui untuk setiap pewarnaan yang mungkin, dapat dipastikan bahwa terdapat 4 kolom dan 4 baris sehingga ke-16 persegi satuan yang didapatkan dari perpotongan 4 kolom dan 4 baris tersebut memiliki warna yang sama. Jika n adalah nilai terkecil yang memenuhi, carilah sisa n ketika dibagi oleh 1000.

15. Misalkan x, y, z adalah bilangan real yang terletak di interval $(0, 1]$; $x + y \geq z + 1$. Maka tentukan nilai minimum $8P$ jika

$$P = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{xy+z^2}.$$

16. Tentukan hasil penjumlahan semua bilangan asli n sehingga terdapat tiga bilangan prima p, q, r yang memenuhi

$$p^n + q^2 = r^2.$$

.

Bagian B

Tuliskan jawaban beserta langkah pekerjaan Anda secara lengkap. Jawaban boleh diketik, difoto, ataupun di-scan. Setiap soal bernilai 7 angka. Tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.

1. Diketahui A dan B memainkan sebuah permainan pada suatu petak berukuran 8×8. Pertama-tama, A meletakkan koin di sembarang petak, kemudian B dan A secara bergantian meletakkan koin pada diagonal yang sama dengan koin yang diletakkan sebelumnya. Pemain kalah jika tidak bisa melanjutkan permainan.

   (a) Partisi petak 8×8 menjadi 16 petak berukuran 2×2. Buktikan bahwa B selalu bisa meletakkan koin pada petak 2×2 yang sama dengan koin yang diletakkan sebelumnya.

   (b) Buktikan bahwa B memiliki strategi untuk menang.

2. Tentukan, dengan bukti, semua bilangan real x sedemikian sehingga median dari enam bilangan yang berbentuk $ax^2 + bx + c$ di mana $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$ adalah 26.

3. Diberikan segitiga lancip ABC dengan $AB < AC$. Misalkan I dan O secara berturut-turut adalah titik bagi, dan titik pusat lingkaran luar segitiga ABC. Misalkan BI dan CI memotong lingkaran luar $\triangle ABC$ secara berturut-turut di M_B dan M_C ($M_B \neq B$, $M_C \neq C$). Jika BM_C sejajar CM_B, buktikan bahwa ketiga garis M_BM_C, OI, dan BC konkuren.

4. Cari semua bilangan asli t sehingga terdapat bilangan asli $n > 1$ yang relatif prima terhadap t sehingga barisan $n + t, n^2 + t, n^3 + t, ...$ tidak mengandung bilangan berpangkat. (Catatan: Suatu bilangan asli a disebut bilangan berpangkat jika terdapat bilangan asli k dan bilangan asli $l \geq 2$ sehingga $a = k^l$).